The Irrationality via Diophantine Approximation and Mathematica (Study of Mathematical Software and Its Effective Use for Mathematics Education)

AUTHOR(S):

平田, 典子; 石井, 夕紀子; 栗本, 裕太; 鈴木, 潔光; 鷲尾, 勇介; 善養寺, 未来

CITATION:

平田, 典子 ...[et al]. The Irrationality via Diophantine Approximation and Mathematica (Study of Mathematical Software and Its Effective Use for Mathematics Education). 数理解析研究所講究録 2018, 2067: 55-64

ISSUE DATE:

2018-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/241934

数理解析研究所講究録
第2067巻 2018年 55-64

The Irrationality *via* Diophantine Approximation and Mathematica

N. Hirata-Kohno, Y. Ishii, Y. Kurimoto, K. Suzuki (Nihon Univ.),
Y. Washio (Buzan-Joshi HS, Nihon Univ.) & M. Zenyoji (Hosoda-Gakuen HS)

Abstract

In the present notes, we study the irrationality of a real number. We explain here Weyl's Criterion: whenever a real number θ is irrational, then the fractional part $\{n\theta\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ of $n\theta$ is uniformly distributed mod 1. We try to adapt it to visualize the sequence for the purpose to observe what happens for certain real number θ whose irrationality is expected but not yet proven. We investigate the behavior of the sequence from the viewpoint of Diophantine approximation. We use Mathematica software to see the phenomena.

Mathematics Subject Classification [2010]: 11J71, 11K38, 11K60
Keywords: Irrationality, Uniform distribution mod 1, Weyl's Criterion, Mathematica

1 Introduction

Irrational number (無理数) とは実数の集合 $\mathbb{R}$ の元であって有理数の集合 $\mathbb{Q}$ に属さない数のことを指す.

一般に正の実数 $0 < \theta \in \mathbb{R}$ に対して

$\lfloor\theta\rfloor$ = the greatest integer $\leq \theta$	(最大整数部分)
$\{\theta\} = \theta - \lfloor\theta\rfloor$ the fractional part of θ	(小数部分)
$\lVert\theta\rVert$= distance to the nearest integer	(整数への最短距離) と記することにする.

本稿において我々は無理数であることが知られている数および,無理数であろうと予想されるいくつかの実数 θ に関して数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の挙動を観察し,一様分布性およびディオファントス近似の議論による考察を行う.実際に与えられた実数に対して無理数であるか有理数であるかを証明することは困難な場合も多いが,それでも無理数という概念そのものは中学生以上であれば説明は可能であり,また魅力的な未解決問題も知られているため,数学教育の観点からは極めて優れた教材を提供できるキーワードになり得る.本稿ではこの観点をふまえた動画教材の提案についても論ずる.[1] [2] [3]

[1] This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, Research Center located in Kyoto University.

[2] The first author was supported partly by Grant-in-Aid for Scientific Research (C), JSPS, no. 26520208 and no. 15K04799. The 5th author was supported partly by a grant of Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

[3] 一様分布のいくつかの図において線分を追加したお蔭で,数列の精密な観察が可能になった.このアイデアは千葉県立千葉高等学校数学科教諭 大橋 真也先生のご教示に負うものである.この場を借りて謝辞を申し述べさせて頂く.

数列 $\Big(\{n\theta\}\Big)$ とは $n\theta$ の小数部分の成す実数列つまり以下に記すものである：

$$\{\theta\} = \theta - \lfloor\theta\rfloor,$$
$$\{2\theta\} = 2\theta - \lfloor 2\theta\rfloor,$$
$$\{3\theta\} = 3\theta - \lfloor 3\theta\rfloor, \ldots$$

円周率 π や $\sqrt{5}$ は無理数であることが分かっており，良く知られているように $\sqrt{5}$ が無理数であることは $\sqrt{5}$ が $x^2 = 5$ の根であることを用いて背理法で証明されるが，π の無理数性の証明には Hermite 多項式 と呼ばれる，やや高度な議論を用いる．

また小数点以下に素数を並べた実数 Copeland-Erdős 数 0.2357111317192329313741...(*see* [4][5]) についても，複雑な議論に負うが無理数であることは証明されている．しかしながら無理数であろうと予想されていても，残念なことに数学的証明のなされていない神秘的な実数は多い．θ が無理数ならば後述の Weyl's Criterion によって $\{n\theta\}$ の mod 1 における一様分布性が導かれることが知られているが，この事実を踏まえ，$\Big(\{n\theta\}\Big)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の数列の挙動を Mathematica によって視覚化した計算試行をここに提出する．

我々の目的は，無理数であろうと考えられるが未だ証明の存在しない実数の性質をディオファントス近似の観点から観察し，正確な予想をたてるための一助にすることである．また数学に対する興味をかきたてることこそ数学教育の根幹であると考えらるが，それを一瞬で実行できるような面白く魅力的な視覚的動画教材を紹介することである．

2 一様分布

まず一様分布の定義を述べよう．

実数列 $\omega = \Big(x_n\Big)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考える．長さ 1 の単位区間 $[0,\ 1] \subset \mathbb{R}$ を I と記する．任意の実数 θ に対してその小数部分 $\{\theta\}$ は I に属する．

正整数 N および I の部分集合 E に対し，$1 \le n \le N$ のときに $x_n \in E$ となるような x_n の個数を $A(E, N, \omega)$ と定める．混同のおそれの無いときには単に $A(E, N)$ と表す．

Definition 2.1 (一様分布 mod 1) 実数列 $\omega = \Big(x_n\Big)$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が mod 1 で一様分布するとは，任意の $0 \le a < b \le 1$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a, b); N, \omega)}{N} = b - a$$

が成立するときにいう．

この定義の意味は，数列の小数部分が [0, 1] 区間で均等に位置するということである．
次の結果は Weyl's Criterion と呼ばれる基本的な結果である．いわゆる Weyl 和の評価で一様分布の言い換えができるのである．

Theorem 2.1 (H. Weyl [13], *see* p. 7, Theorem 2.1 in [7])

実数列 $\omega = \left(x_n\right)$ に対し

$$\left(x_n\right) \text{ が mod 1 で一様分布する} \iff \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi \imath h x_n} = 0 \quad \text{for all integers h} \neq 0.$$

この定理を用いて，次の性質を証明しよう．

Theorem 2.2 (Bohl, Sierpiński, Weyl, *see* p. 8, [7])

実数 θ が無理数 $\iff$ 数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は mod 1 で一様分布する．

Proof. $\Rightarrow$)

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi \imath h n\theta}\right| = \frac{|e^{2\pi \imath h N\theta} - 1|}{N|e^{2\pi \imath h\theta} - 1|} \leq \frac{1}{N|\sin \pi h\theta|}$$

であり，θ が無理数ならば，右辺の分母における $\sin \pi h\theta$ は $h \neq 0$ に対し零でない定数である．従って $N \to \infty$ とすれば Theorem2.1 より $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は mod 1 で一様分布する．

$\Leftarrow$) 対偶をとり，θ が有理数ならば一様分布しないことを示せば良い．θ が有理数ならば数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ は区間 $[0,\ 1]$ における有限個の点のみを値にとる（下記の観察参照）．従って $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は mod 1 で一様分布しない． □

観察　実際に $\theta \in \mathbb{Q}$ に対して $\left(\{n\theta\}\right)$ の様子を見るために以下，円周の長さが 1 の円を $[0,\ 1)$ 区間と考えて数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ をプロットする．

例えば $\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ は次のようになる．$n = 0, 1, 2, \ldots$ の点を図示してみよう．

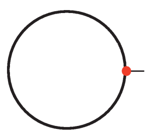

図 1 :$n = 0$

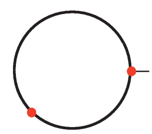

図 2 :$n = 1$

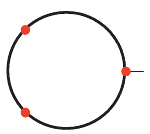

図 3 :$n = 2$

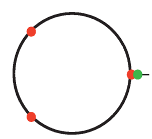

図 4 :$n = 3$

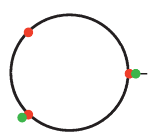

図 5 :$n = 4$

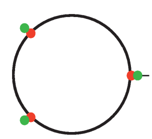

図 6 :$n = 5$

という訳である．

Remark 2.1

ここで一つ注意を喚起する．いわゆる位相的な意味での稠密という概念よりも，一様分布は強いのである．
その理由を述べるために Salem 数と呼ばれるものを説明する．α が Salem 数とは，α 自身が 1 より大きな実の代数的整数であり，α の満たす整数係数の既約多項式の他の根が複素数平面内の単位円の内部または円周上にあり，さらに少なくとも一つの根が単位円周上に存在するときに言う．
Salem 数は 4 次以上の偶数次の相反方程式の根になることが分かる．
実は

α が Salem 数ならば，等比数列の小数部分 $\left(\{\alpha^n\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ **は 一様分布しない**

ことで知られている．しかしながら

α が Salem 数のとき「べき乗の」小数部分 $\left(\{\alpha^n\}\right)$ **は稠密になるのである！**

Salem 数の例としては，たとえば $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1 = 0$ の最大の実根があげられる．

Remark 2.2

ついでに α が Pisot 数とは 1 より大の実の代数的整数であり，α の満たす整数係数の既約多項式の α 以外の根は複素数平面内の単位円の真の内部に含まれる数を指す．
α が Pisot 数のときも，数列 $\left(\{\alpha^n\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は一様分布しない．また

$$\alpha \text{ が Pisot 数} \Longrightarrow n \to \infty \text{ のとき } \|\alpha^n\| \text{ が } 0 \text{ に収束する}$$

ことも知られている (*see* p. 20 [2]).

3 数列の挙動に関する Mathematica 動画教材

例えば， Champernowne 数と呼ばれる数 $\theta = 0.12345678910111213141516\ldots$ を考えよう [3]．これは底 10 に関する正規数と呼ばれる無理数であるが，さらに超越数，即ちどんな有理数係数の一変数多項式の根にもならないことが K. Mahler によって証明されている [8]．以下この節では 円周の長さが 1 の円を [0, 1) 区間とみなす．そして Champernowne 数などの様々な無理数 θ に対して数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ を円周の長さ 1 の円周上にプロットした動画教材を紹介する．これらは Mathematica software を活用して全て第４著者 鈴木潔光により作成された．動画教材ではあるがそのひとつの瞬間を図示して行くものである．数列 $\left(x_n\right)$ の隣接２項 x_n と x_{n+1} を結んだ線分（大橋真也先生のアイデア）を加えることによって数列の挙動が明確に表されている．
さて一様分布の状況を説明するために以下の量を定める．

Definition 3.1 (Discerpancy (くいちがい度))

実数列 $\omega = \left(x_n\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考える．$\omega = \left(x_n\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の Discrepancy $D_N(\omega)$ とは以下の量である．

$$D_N(\omega) = \sup_{0 \le a < b \le 1} \left| \frac{A([a,\ b); N, \omega)}{N} - (b - a) \right|$$

以下の性質が知られている.

Theorem 3.1 (Theorem 1.1, p. 89, [7], Theorem 1.12, p. 10, [2])

$\lim_{N\to\infty} D_N(\omega) = 0 \Longleftrightarrow \omega = \Big(x_n\Big)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は mod 1 で一様分布.

注意　すなわち次が言えよう.

- D_N が小さい $\Longleftrightarrow \omega = \Big(x_n\Big)$ は mod 1 で一様分布に近い状態にある.
- D_N が大きい $\Longleftrightarrow \omega = \Big(x_n\Big)$ は mod 1 で一様分布から遠い状態にある.

Example 3.1

数列 $\Big(\{n\theta\}\Big)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が実際に mod 1 で一様分布する様子を，θ の無理数性が既に分かっている数 θ について図示する.

(1) $\theta = \pi$　(円周率 $\in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)
(2) $\theta = 0.12345678910111213141516\ldots$　(Champernowne 数 $\in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)
(3) $\theta = 0.23571113171923293137 41\ldots$　(Copeland-Erdős 数 $\in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)

Mathematica による図
例 (1) に対する数列 $\Big(\{n\theta\}\Big)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, 200)$ の一様分布の挙動が図 7 である.

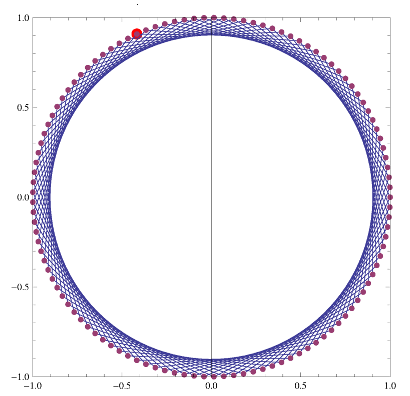

図 7　: (1) の図, $n = 200$ まで, $\theta = \pi$

例 (2) に対する数列 $\Big(\{n\theta\}\Big)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, 200)$ の一様分布の挙動が図 8 であり，また例 (3) に対する数列 $\Big(\{n\theta\}\Big)$ の一様分布の挙動が図 9 である．隣接 2 項の距離は Copeland-Erdős 数のほうがあまり小さくないことがわかる.

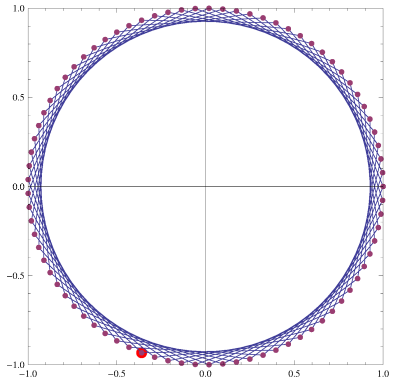

図 8 : (2) の図, $n = 200$ まで, θ =Champernowne 数

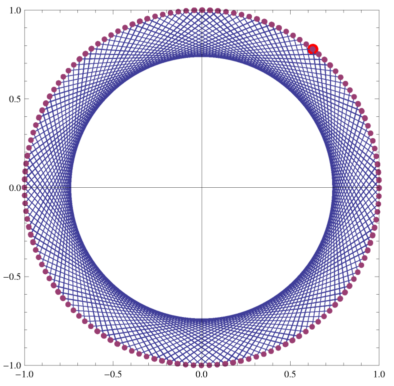

図 9 : (3) の図, $n = 200$ まで, θ =Copeland-Erdős 数

Example 3.2

次に，数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ が mod 1 で一様分布するのが否かということを観察するために，θ の無理数性が未だに分かっていない実数 θ について $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の挙動を図示する．たとえばリーマンのゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ は素数の分布など整数論の重要な定理を導く一変数複素関数であるが，その整数点における値の性質はあまり分かっていない．$s =$ 偶数の場合は Euler の考察から π の累乗 $\times$ 有理数となることが知られているので，π が超越数であることより $\zeta($ 偶数$)$ は必ず無理数であることが従う．しかし $s =$ 奇数の場合は $s = 3$ のときにフランス Caen の高校の先生であった Roger Apéry によって $\zeta(3)$ が無理数であることが証明されたのみであり，$\zeta(5)$ や $\zeta(7)$ などの他の奇数に対してはリーマンゼータの値の無理数性は未だ証明されていない．Apéry の手法（驚くべき証明）を他の奇数に拡張することは本質的な困難を伴い，誰も成功していない．ここではそのうち $\zeta(5)$ をはじめとした「無理数であることが予想されるが証明がなされていない」実数についての $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の挙動の Mathematica 動画を示す．(4)(5)(6)(7) はいずれも「無理数であることの証明がされていない」実数である．隣接 2 項 $\{n\theta\}$ および $\{(n+1)\theta\}$ を線分で結び，その動きが良く見えるようになっている（再び大橋先生のアイデアを活用させて頂いている）．Discrepancy の大小も観察できる．

(4) $\log\log 7$

(5) $\zeta(5) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5}$ (only $\zeta(3) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ known)

(6) $\gamma = \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} - \log m) = 0.577215\ldots$(Euler-Mascheroni 定数)

(7) $K = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} = 0.91596\ldots$ (Catalan 数)

例 (4) に対する数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, 200)$ の数列の挙動が図１０である．一様分布するようには見えない？？...

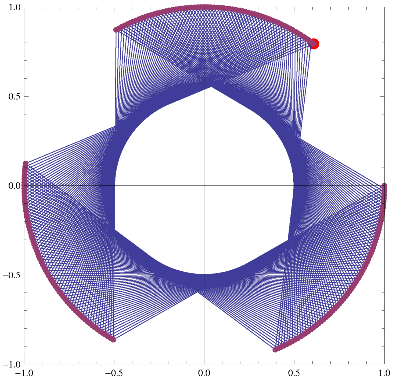

図 10　: (4) の図, $n = 200$ まで, $\theta = \log\log 7$

例 (5) に対する数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, 200)$ の数列の挙動が図１１である．隣接２項の距離および Discrepancy も小さく，$\zeta(5)$ が無理数であることが支持されると読みとれる（証明は未だない）.

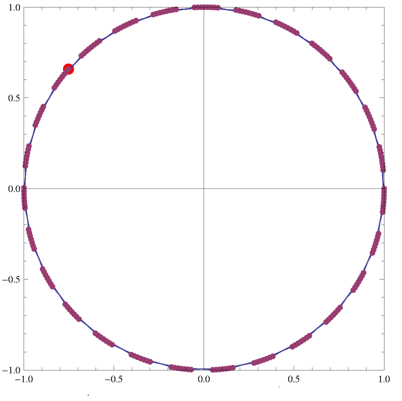

図 11　: (5) の図, $n = 200$ まで, $\theta = \zeta(5)$

例 (6) に対する数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, 200)$ の数列の挙動が図１２である．また例 (7) に対する数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, 200)$ の数列の挙動が図１３である．これらの図１２と図１３からは例 (6) と例 (7) の数が無理数であることが支持されると読みとれる（証明は未だない）.

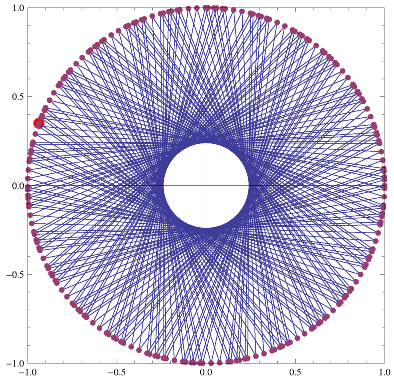

図 12 : (6) の図, $n = 200$ まで, θ =Euler-Mascheroni 定数

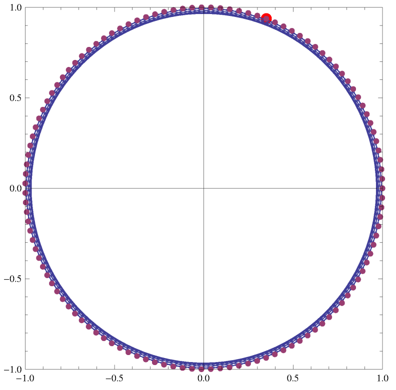

図 13 : (7) の図, $n = 200$ まで, θ =Catalan 数

4 Discrepancy の評価

Discrepancy の評価については次の定理が知られていることを述べておこう．いわばどのくらい速く一様分布に到達するかという指標となるものである．

Theorem 4.1 (K. Roth, W. Schmidt, *see* p. 10, [2])

無限数列 ω に対し，ある正定数 $C > 0$ が存在して $\dfrac{C \log N}{N} \leq D_N(\omega) \leq 1$ となる．

さて $\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は無理数であるから，$\Big(\{n\theta\}\Big)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は mod 1 で一様分布するが，実はこの黄金数は，無理数の中で $\Big(\{n\theta\}\Big)$ が速く一様分布すると言われているものである．厳密な証明は書かれていないが E. Hlawka が言及し，その後に E. Hlawka, L. Ramshow, C. Baxa による連分数展開を用いて議論された．その論拠となる基本的な評価は H. Niederreiter によって下記のように与えられた：

Theorem 4.2 (Niederreiter, *see* [9])

無理数 α が連分数展開 $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ を持つとする．この部分商が有界，即ちある正定数 K が存在して，全ての $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対し $a_j \leq K$ であるとする．このとき数列 $\omega = (n\alpha)$ の Discrepancy $D_N(\omega)$ は

$$ND_N(\omega) = O(\log N)$$

を満たす．正確には $\xi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とするとき下記が成立する：

$$ND_N(\omega) \leq 3 + \left(\frac{1}{\log \xi} + \frac{K}{\log(K+1)}\right) \log N\ .$$

Example 4.1

例 (8): $\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に対する数列 $\left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, 200)$ の一様分布の挙動が図１４である．

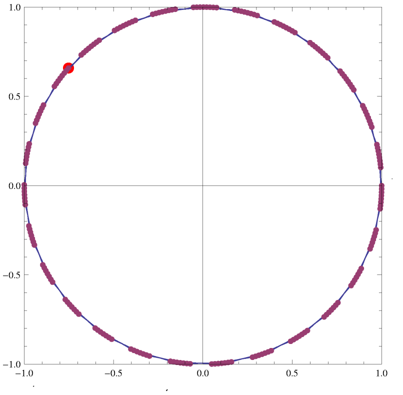

図 14 ：(8) の図, $n = 200$ まで, $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

定理 4.2 の $O(\log N)$ に現れる定数の精密な評価に関して，C. Baxa, L. Ramshow, J. Schoissengeier らにより以下が得られている．

Theorem 4.3 (*see* [1][10][11][12])

$\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に対して数列 $\omega = \left(\{n\theta\}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{ND_N(\omega)}{\log N} = 0.416\ldots$$

を満たす．

参考文献

[1] C. Baxa, *Comparing the distribution of* $(n\alpha)$*-sequences*, Acta Arith., **94** (4), (2000), 345–363.

[2] Y. Bugeaud, *Distribution Modulo One and Diophantine Approximation*, Cambridge Tracts in Math., **193**, Cambridge Univ. Press, 2012.

[3] D. G. Champernowne, *The construction of decimals normal in the scale of ten*, J. London Math. Society **3**, (1933), 254–260.

[4] A. H. Copeland and P. Erdős, *Note on Normal Numbers*, Bulletin of the American Mathematical Society **52**(1), (1946), 857–860.

[5] H. Davenport and P. Erdős, *Note on normal decimals*, Canadian J. Math. **4**, (1952), 58–63.

[6] M. Drmota and R. F. Tichy, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lecture Notes in Math., **1651**, Springer, 1997.

[7] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, John Wiley & Sons, 1974, second edition renewed by H. Niederreiter, 2006, Dover.

[8] K. Mahler, *Lectures on Diophantine Approximations, Part I: g-adic Numbers and Roth's Theorem*, University of Notre Dame Press, 1961, Literary Licensing, LLC, 2012.

[9] H. Niederreiter, *Application of diophantine approximations to numerical integration*, In: Diophantine Approximation and Its Applications (ed. C. F. Osgood), Acad. Press, 1973, 129–199.

[10] L. Ramshaw, *On the disprepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number*, J. Number Theory, **13**, (1981), 138–175.

[11] J. Schoissengeier, *On the disprepancy of* $(n\alpha)$, *II*, J. Number Theory, **24**, (1986), 54–64.

[12] J. Schoissengeier, *The disprepancy of* $(n\alpha)$ $n \geqq 1$, Math. Ann., **296**, (1993), 529–545.

[13] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Ann., **77**, (1916), 313–352.

Noriko Hirata-Kohno (平田典子)
Department of Mathematics;
College of Science & Technology
Nihon University
Kanda, Chiyoda, Tokyo
101-8308, Japan
hirata@math.cst.nihon-u.ac.jp

Kiyomitsu Suzuki (鈴木潔光)
Department of Physics;
Yukiko Ishii (石井夕紀子)
and Yuta Kurimoto (栗本裕太)
Department of Mathematics;
College of Science & Technology
Nihon University
Kanda, Chiyoda, Tokyo
101-8308, Japan

Yusuke Washio (鷲尾勇介)
Buzan-joshi High School;
Nihon University
Nakadai 3-15, Itabashi, Tokyo
174-0064, Japan

Miku Zenyoji (善養寺未来)
Hosoda Gakuen;
Shiki, Saitama
353-0004, Japan